ФИЗИКА

УДК 538.955

Н. В. Антонов, П. И. Какинь

ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ РЕНОРМГРУППА В МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОГО РОСТА ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Исследуется влияние турбулентного перемешивания на случайный анизотропный рост границы раздела фаз в задаче о выпадении осадка на подложку. Рост описывается моделью Вольфа — анизотропным обобщением модели Кардара—Паризи—Занга. Турбулентное адвективное поле скорости моделируется анизотропным ансамблем Авельянеды—Майда. Гауссова статистика с корреляционной функцией $\langle vv\rangle \propto \delta(t-t')\delta(k_{\|})\, k_{\perp}^{-d+1-\xi}$, где k — волновое число и $0 < \xi < 2$ — свободный параметр. С использованием теоретико-полевой группы перенормировок установлены неподвижные точки модели со скоростью и без неё — последние оказываются в согласии с результатами Вольфа. Показано, что при пространственной размерности $d = 2$ все найденые неподвижные точки стягиваются в одну; однако, это не противоречит существованию физической сильно взаимодействующей точки модели Кардара—Паризи—Занга, которая должна сохраняться и в этой модели. Включение поля скорости разрушает стабильность неподвижных точек модели и запрещает седловую точку модели Кардара—Паризи—Занга. Практические вычисления координат неподвижных точек и их области стабильности вычисляются в первом порядке (двойного) разложения по ξ и $\varepsilon = 2-d$ (однопетлевое приближение). Библиогр. 30 назв. Табл. 1.

Ключевые слова: неравновесные системы, ренормгруппа, критическое поведение, скейлинг.

N. V. Antonov, P. I. Kakin

FIELD THEORETIC RENORMALIZATION GROUP IN A MODEL OF ANISOTROPIC GROWTH OF AN INTERFACE

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

We study effects of turbulent mixing on the random growth of an interface in the problem of the deposition of a substance on a substrate. The growth is described by the Wolf model — anisotropic generalisation of Kardar—Parisi—Zhang model. The turbulent advecting velocity field is modelled by the anisotropic Avellaneda—Majda ensemble. Gaussian statistics with the correlation function $\langle vv\rangle \propto \delta(t-t')\delta(k_{\|})\, k_{\perp}^{-d+1-\xi}$, where k is the wave number and $0 < \xi < 2$ is a free parameter. Using the field theoretic renormalization group we establish existence of the fixed points both for the model without advection and for the model with it — in the former case the results

* Работа поддержана грантами РФФИ (№ 16-32-00086) и DAAD/СПбГУ (№ 11.23.1138.2016).

 DOI: 10.21638/11701/spbu04.2016.401

are in a good adreement with those of Wolf. It turns out that in the case of spacial dimension $d = 2$, all found fixed points converge to one — a Gaussian point; nevertheless, this does not forbid the existence of the physical "non-perturbative" strong-coupling fixed point of Kardar—Parisi—Zhang model which can survive in our model. Addition of the velocity field destroys stability of the fixed points and forbids "good" perturbative fixed point of Kardar—Parisi—Zhang model. Practical calculations of the fixed point coordinates and their regions of stability are calculated to the first order of the (double) expansion in ξ and $\varepsilon = 2 - d$ (one-loop approximation). Refs 30. Tables 1.

Keywords: non-equilibrium systems, renormalization group, critical behavior, scaling.

Введение и описание моделей. В течение последних десятилетий процессы роста в различных физических системах вызывали неослабевающий интерес. Это фронты отвердевания и пламени, дым и коллоидные агрегаты, опухоли и т. п. (см., например, [1–9]). Наиболее характерный пример — выпадение осадка на подложку и рост соответствующей фазовой границы. Ряд микроскопических моделей был выдвинут для описания этих явлений: модель Идена [6], Эдвардса—Вилкинсона [7], ограниченные модели твёрдое тело — на твёрдом теле [8], балистическое выпадение [9], и это ещё не полный список.

Все процессы роста имеют несколько важных общих черт с поведением равновесных почти критических систем: а именно самоподобное (скейлинговое) поведение (степенные зависисмости) с достаточно универсальными (не зависящими от особенностей конкретного процесса) индексами. Отсюда естественным образом вытекает определение универсальных свойств процессов роста на основе определённых упрощённых моделей для сглаженного (крупнозернистого) поля высоты по аналогии с теорией критического состояния, где большинство типичных классов универсальности (типов критического поведения) описываются классической моделью φ^4 [10, 11]. В качестве крупнозернистой модели роста обычно используется модель Кардара—Паризи—Занга (КПЗ) [12], описываемая нелинейным диференциальным уравнением

$$\partial_t h = \nu_0\, \partial^2 h + \lambda_0 (\partial h)^2/2 + f. \tag{1}$$

Здесь поле высоты $h(x) = h(t, \boldsymbol{x})$ зависит от d-мерной координаты подложки $\boldsymbol{x}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ — оператор Лапласа, и $(\partial h)^2 = \partial_i h \partial_i h$; суммирование по повторяющимся тензорным индексам везде подразумевается. Первый член в правой части уравнения (1) описывает поверхностное натяжение с коэффициентом $\nu_0 > 0$. Второй член представляет рост вдоль локальной нормали к поверхности. Параметр λ_0 может иметь любой знак.

Далее: $f = f(x)$ — гауссов случайный шум с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией

$$\langle f(x) f(x')\rangle = D_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{2}$$

с положительным амплитудным множителем $D_0 > 0$.

Строго говоря, чтобы исключить линейный во времени рост среднего значения $\langle h\rangle$, нужно ввести ненулевое среднее значение $\langle f\rangle$. Поскольку нас интересуют величины, которые включают только разности полей, средними значениями можно одновременно пренебречь.

Модель (1), (2) появилась впервые в основополагающей статье Форстера, Нельсона и Стефена [13] в терминах чисто продольного (потенциального) векторного поля $u_i = \partial_i h$. Тогда для $\lambda_0 = -1$ она представляет d-мерное обобщение уравнения Бюргерса.

Его также можно отобразить на модель ориентированных полимеров в случайной среде и на модель многочастичной бозе-системы с притяжением (см., например, [14]).

В публикациях [15–18] рассматривались случаи анизотропной модели КПЗ. Анизотропию в таких задачах можно вводить следующим образом: пусть константа $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, определяющий выбранное направление (направление наклона). Тогда любой вектор можно разложить на компоненты, ортогональные и параллельные $\boldsymbol{n}$. В частности, для d-мерной горизонтальной координаты $\boldsymbol{x}$ имеем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{n}x_\parallel$, где $\boldsymbol{x}_\perp \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Производную в полном d-мерном $\boldsymbol{x}$ пространстве можно обозначить $\partial = \partial/\partial x_i$, где $i = 1 \ldots d$, а производную в подпространстве, ортогональном $\boldsymbol{n}$, как $\partial_\perp = \partial/\partial x_{\perp i}$, где $i = 1 \ldots d-1$. Тогда производная вдоль паралелльного направления будет записываться $\partial_\parallel = \boldsymbol{n} \cdot \partial$.

С такими обозначениями анизотропная КПЗ — модель Вольфа [15] — будет выглядеть

$$\partial_t h = \nu_{\parallel 0}\, \partial_\parallel^2 h + \nu_{\perp 0}\, \partial_\perp^2 h + \frac{1}{2}\lambda_{\parallel 0}(\partial_\parallel h)^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\perp 0}(\partial_\perp h)^2 + f. \tag{3}$$

Исследование этой модели с помощью ренормгрупповых уравнений Вильсона дало ряд неподвижных точек, согласующихся с изотропным случаем.

Теоретико-полевая ренормировочная группа (РГ) предоставляет мощную количественную теорию критического состояния [10, 11]. В РГ-подходе возможные классы универсальности связаны с инфракрасными притягивающими фиксированными точками перенормируемых теоретико-полевых моделей.

РГ-анализ модели КПЗ, начатый в [12, 13], в конечном итоге (после некоторого недопонимания) привёл к следующим заключениям [19, 20]. В теоретико-полевой формулировке стохастическая задача (1), (2) мультипликативно перенормируема. Нелинейность $(\partial h)^2$ в (3) ИК-несущественна (в смысле Вильсона) для $d > 2$, логарифмична (погранична) для $d = 2$ и существенна для $d < 2$. Таким образом, её можно изучать с помощью стандартной пертурбативной РГ и разложения по $\varepsilon \equiv 2 - d$. Соответствующие РГ-уравнения обладают нетривиальной фиксированной точкой с критическими индексами $\chi = 0$, $z = 2$ (точное соотношение $\chi + z = 2$ продиктовано галилеевой симметрией). Тем не менее фиксированная точка для $\varepsilon < 0$ ИК-отталкивающая, тогда как для $\varepsilon > 0$ она не лежит в физической области параметров модели $(D_0, \kappa_0 > 0)$ и, таким образом, едва ли может описывать ИК-асимптотическое поведение задачи. Все эти результаты являются «пертурбативно точными», т. е. точными во всех порядках разложения по ε.

Тем не менее можно предположить, что модель КПЗ содержит гипотетическую ИК-притягивающую «сильно взаимодействующую» фиксированную точку, не проявляющуюся в рамках какой-либо теории возмущений. Тогда для $d = 1$ флуктуационно-диссипационная теорема вместе с галилеевой симметрией даёт точные значения $\chi = 1/2$, $z = 3/2$ [12, 13]. Сделав дополнительные (довольно нетривиальные) предположения, можно получить точные значения критических индексов для случаев $d = 2$ и $d = 3$ [21]. Доказательство существования сильно взаимодействующей точки, обеспечиваемое так называемой функциональной (также известной как «точная», или «непертурбативная») РГ [22, 23], хотя и убедительно, количественно всё ещё недостаточно надёжно, и саму ситуацию нельзя считать удовлетворительной.

Для анизотропной КПЗ задача о существовании сильно взаимодействующей точки ещё не была решена.

Хорошо известно, что поведение реальных систем вблизи критических точек крайне чувствительно к внешним воздействиям. Некоторые воздействия могут менять тип фазового перехода или порождать новые классы универсальности. Исследования влияния различных типов детерминистских или хаотических течений на поведение критических систем показали, что они могут разрушить обычное критическое поведение: оно может смениться на поведение типа среднего поля или, при выполнении определённых условий, может перейти в более сложное, описываемое неравновесными классами универсальности [24–26].

Исследование модели КПЗ под влиянием поля скорости, описываемого ансамблем Казанцева—Крейчнана [27], представлено в [28]. Оказалось, что система демонстрирует различные типы ИК-поведения, связанного с четырьмя возможными неподвижными точками РГ-уравнений. В дополнение к известным режимам (обыкновенная диффузия, обыкновенный процесс роста и пассивное адвективное скалярное поле) был найден новый неравновесный класс универсальности.

В нашей работе изучается модель анизотропного роста Вольфа [15] и её поведение под влиянием случайного (турбулентного) анизотропного движения жидкости, содержащей растворённые частицы, — d-мерного обобщения ансамбля Авельянеды—Майда [29]. Перенос полем скорости $\boldsymbol{v}(x) \equiv \{v_i(x)\}$ вводится заменой

$$\partial_t \to \nabla_t = \partial_t + v_i \partial_i, \tag{4}$$

где ∇_t — галилеево-ковариантная (лагранжева) производная.

Будем рассматривать поле скорости в виде

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} v(t, \boldsymbol{x}_\perp),$$

где $v(t, \boldsymbol{x}_\perp)$ не зависит от $x_\|$. При таком определении автоматически выполняется условие несжимаемости

$$\partial_i v_i = \partial_\| v(t, \boldsymbol{x}_\perp) = 0.$$

Мы считаем, что $v(t, \boldsymbol{x}_\perp)$ имеет гауссово распределение с нулевым средним и парным коррелятором вида

$$\begin{aligned} \langle v(t, \boldsymbol{x}_\perp) v(t', \boldsymbol{x}'_\perp) \rangle = \delta(t - t') \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \exp\{\mathrm{i}k \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\} D_v(k) = \\ = \delta(t - t') \int \frac{dk_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \exp\{\mathrm{i}k_\perp \cdot (\boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}'_\perp)\} \widetilde{D}_v(k_\perp), \end{aligned} \tag{5}$$

где $k_\perp = |k_\perp|$ и D_v — скалярные коэффициенты:

$$D_v(k) = 2\pi\delta(k_\|) \widetilde{D}_v(k_\perp), \;\; \widetilde{D}_v(k_\perp) = B_0 \, k_\perp^{-d+1-\xi},$$

$B_0 > 0$ — амплитудный множитель; показатель $0 < \xi < 2$ — свободный параметр, который можно рассматривать как своего рода показатель Гёльдера, который характеризует «негладкость» поля скорости; «колмогоровским» значением ξ будет $\xi = 4/3$, тогда как «бэтчелоровский» предел $\xi \to 2$ будет относиться к случаю очень гладкой скорости. Обрезание в интеграле (5) снизу в $k = m$, где $m \equiv 1/\mathcal{L}$ отвечает интегральному масштабу турбулентности $\mathcal{L}$, обеспечивает ИК-регуляризацию. Его точная форма не важна; резкое обрезание — простейший выбор из практических соображений.

План работы. Вначале приводится теоретико-полевая формулировка стохастической задачи (3) и стохастической задачи со скоростью, а также диаграммная техника.

Затем проводится анализ ультрафиолетовых (УФ) расходимостей обеих моделей и показывается их мультипликативная перенормируемость. Обсуждаются неподвижные точки РГ-уравнений для модели без скорости и со скоростью, области их ИК-стабильности в пространстве параметров ε, ξ. Затем анализируются полученные результаты.

Теоретико-полевая формулировка моделей. Рассмотрим сначала исходную модель Вольфа без адвекции. Согласно общему утверждению [10, 11], стохастическая задача (3) эквивалентна теоретико-полевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{1}{2}h'h' + h'\left\{-\partial_t h + \frac{1}{2}\lambda_{\|0}(\partial_\| h)^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\perp 0}(\partial_\perp h)^2 + \nu_{\perp 0}\,\partial_\perp^2 h + \nu_{\|0}\,\partial_\|^2 h\right\}, \qquad (6)$$

(мы положили $D_0 = 1$). Здесь и далее все необходимые интегрирования по $x = (t, \boldsymbol{x})$ и суммирования по повторяющимся тензорным индексам подразумеваются, например,

$$h'h' = \int dt \int d\boldsymbol{x}\; h'(t, \boldsymbol{x})\, h'(t, \boldsymbol{x}).$$

Теоретико-полевая формулировка означает, что различные корреляционные функции и функции отклика стохастической задачи (3) могут быть соотнесены с различными функциями Грина теоретико-полевой модели с действием (6). Иными словами, они представляются функциональными средними по полному набору полей $\Phi = \{h, h'\}$ с весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$.

Затравочные пропагаторы в соответствующей диаграммной технике Фейнмана определяются свободными (билинейными по полям) частями действия (6). В частотно-импульсном (ω—$\boldsymbol{k}$) представлении они имеют вид

$$\langle hh'\rangle_0 = \langle h'h\rangle_0^* = \{-\mathrm{i}\omega + \varepsilon(k)\}^{-1},\ \langle hh\rangle_0 = \left\{\omega^2 + \varepsilon^2(k)\right\}^{-1}, \qquad (7)$$

где $\varepsilon(k) = \nu_\|^2 k_\|^2 + \nu_\perp^2 k_\perp^2$.

В этой модели две вершины взаимодействия: $1/2\lambda_\| h'(\partial_\| h)^2/2$ и $1/2\lambda_\perp h'(\partial_\perp h)^2/2$.

Включение поля скорости $\boldsymbol{v}(x) \equiv \{v_i(x)\}$ выполняется подстановкой (4) в (3) и, далее в (6). Полная задача тогда становится эквивалентна теоретико-полевой модели трех полей $\Phi = \{h, h', \boldsymbol{v}\}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{1}{2}\,h'h' + h'\left\{-\nabla_t h + \frac{1}{2}\lambda_{\|0}(\partial_\| h)^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\perp 0}(\partial_\perp h)^2 + \nu_{\perp 0}\,\partial_\perp^2 h + \nu_{\|0}\,\partial_\|^2 h\right\} + \mathcal{S}_{\boldsymbol{v}}. \qquad (8)$$

Последний член отвечает гауссову усреднению по полю $\boldsymbol{v}$ с коррелятором (5):

$$\mathcal{S}_v = \frac{1}{2}\int dt \int d\boldsymbol{x}_\perp d\boldsymbol{x'}_\perp v(t, \boldsymbol{x}_\perp)\widetilde{D}_v^{-1}(\boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x'}_\perp)v(t, \boldsymbol{x'}_\perp).$$

Таким образом, диаграммы Фейнмана для полной модели (8) включают, в дополнение к (7), новый пропагатор (5) и новую вершину $-h'(v\partial_\|)h$.

Роль констант взаимодействия в обыкновенной теории возмущений играют три параметра: $g_\perp$ и $g_\|$ — для модели без скорости и параметр w в модели со скоростью:

$$\lambda_{\|0} = g_{\|0}\nu_{\|0}^{5/5}\nu_{\perp 0}^{1/4},\ \lambda_{\perp 0} = g_{\perp 0}\nu_{\|0}^{1/4}\nu_{\perp 0}^{5/4},\ B_0 = \nu_{\|0}w_0.$$

УФ-расходимости и перенормировка. Хорошо известно, что анализ УФ-расходимостей основывается на анализе канонических размерностей («подсчёт степеней») [10, 11]. Динамические модели типа (6) и (8) имеют три независисмых масштаба: временной масштаб T и два масштаба длины — $L_\perp$ и $L_\|$.

Таким образом, каноническая размерность некоторой величины F (поля или параметра в функционале действия) может быть полностью описана тремя числами: частотной размерностью d_F^ω и двумя импульсными размерностями $d_F^\perp$ и $d_F^\|$:

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L_\perp]^{-d_F^\perp} [L_\|]^{-d_F^\|}.$$

Они находятся из очевидных условий нормировки $d_{k_\perp}^\perp = -d_{\boldsymbol{x}_\perp}^\perp = 1$, $d_{k_\perp}^\| = -d_{\boldsymbol{x}_\perp}^\| = 0$, $d_{k_\perp}^\omega = d_{k_\|}^\omega = 0$, $d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$ и из требования, чтобы каждый член функционала действия был безразмерным (по отношению к импульсным и частотной размерностям отдельно). Тогда, основываясь на $d_F^\perp$, $d_F^\|$ и d_F^ω, можно ввести полную каноническую размерность $d_F = d_F^\perp + d_F^\| + 2d_F^\omega$ (в свободной теории, $\partial_t \propto \partial^2$). В теории перенормировки динамических моделей эта величина играет ту же роль, что и привычная (импульсная) размерность в статических задачах [11, гл. 5].

Канонические размерности полей и параметров в моделях (6), (8) представлены в таблице. Она также включает перенормированные параметры (те, что без нижнего индекса «0») и перенормировочную массу μ.

Канонические размерности полей и параметров в моделях (6), (8)

F	h'	h	$\nu_\perp$	$\nu_\|$	$\lambda_\perp$	$\lambda_\|$	$g_\perp$	$g_\|$	B	w	μ
d_F^ω	$1/2$	$-1/2$	1	1	$3/2$	$3/2$	0	0	1	0	0
$d_F^\|$	$1/2$	$1/2$	0	-2	$-1/2$	$-5/2$	0	0	-2	0	0
$d_F^\perp$	$(d-1)/2$	$(d-1)/2$	-2	$(-3-d)/2$	$(1-d)/2$	$-(d-1)/2$	$1-d/2$	$1-d/2$	ξ	0	1
d_F	$d/2+1$	$d/2-1$	0	0	$(2-d)/2$	$(2-d)/2$	$1-d/2$	$1-d/2$	ξ	0	1

Из таблицы следует, что модель (6) логарифмична при $d = 2$, когда константы взаимодейтсвия $g_{\perp 0}$, $g_{\| 0}$ одновременно становятся безразмерными. Отсюда УФ-расходимости в функциях Грина предстают в виде полюсов по $\varepsilon = 2 - d$.

Модель (8) логарифмична при $d = 2$ и $\xi = 0$. УФ расходимости предстают в виде полюсов по ε, ξ и, в общем случае, по всем их линейным комбинациям.

Полная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-\text{н}}$, где $\Phi = \{h, h'\}$, в частотно-импульсном представлении даётся соотношением

$$d_\Gamma = d + 2 - d_h N_h - d_{h'} N_{h'}, \tag{9}$$

где $N_h, N_{h'}$ — числа соответсвующих полей, входящих в функцию Γ [11].

Полная размерность d_Γ в логарифмической теории — это формальный индекс УФ-расходимости: $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=0}$. Поверхностная УФ-расходимость, для исключения которой нужны контрчлены, может быть только в тех функциях Γ, для которых δ_Γ — неотрицательное целое. Контрчлен — полином по частотам и импульсам степени δ_Γ (при условии, что подразумевается соглашение $\omega \propto k^2$).

Если по какой-либо причине некоторое число внешних импульсов возникает как общий множитель во всех диаграммах данной функции Грина, то реальный индекс расходимости δ'_Γ будет меньше, чем δ_Γ на соответсвующее число единиц. Именно это и происходит в обеих рассматриваемых моделях: поле h входит в вершины $1/2\lambda_{\|}h'(\partial_{\|}h)^2/2$, $1/2\lambda_{\perp}h'(\partial_{\perp}h)^2/2$ и $-h'(v\partial_{\|})h$ только в форме пространственной производной. Поэтому любое появление h в какой-либо функции Γ приводит к такому внешнему импульсу и реальный индекс расходимости даётся выражением $\delta'_{\Gamma} = \delta_{\Gamma} - N_h$. Более того, h может возникнуть в соответствующем контрчлене только в форме производной.

Из таблицы и выражения (9) получаем:
для модели (6)

$$\delta'_{\Gamma} = \delta_{\Gamma} - N_h = 4 - N_h - 2N_{h'}; \tag{10}$$

для модели (8)

$$\delta'_{\Gamma} = 4 - N_h - 2N_{h'} - N_v.$$

В динамических моделях все 1-неприводимые функции без полей отклика тождественно исчезают (их диаграммы всегда содержат замкнутые циклы запаздывающих линий) [11]. Таким образом, для (10) достаточно рассмотреть случай $N_{h'} > 0$. Кроме того, стохастическая задача (3) подчиняется Галилеевой инвариантности [15]:

$$h(t,\boldsymbol{x}) \to h(t, x_{\|} + ut) + ux_{\|} + u^2t/2,\ h'(t,\boldsymbol{x}) \to h'(t, x_{\|} + ut).$$

При добавлении скорости эта инвариантность исчезает, но возникает новая:

$$h(t,\boldsymbol{x}) \to h(t, x_{\|} + ut),\ h'(t,\boldsymbol{x}) \to h'(t, x_{\|} + ut),\ \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{v}(t, x_{\|} + ut) - u\boldsymbol{n},$$

с произвольным постоянным параметром u. Эти симметрии накладывают ограничения на форму контрчленов. В совокупности с тем фактом, что поле h может входить в контрчлен только под пространственной производной, они значительно сокращают число возможных контрчленов.

Таким образом, поверхностные УФ-расходимости в модели (6) могут быть только в следующих 1-неприводимых функциях: $\langle h'h'\rangle_{1-\text{н}}$, $\langle h'hh\rangle_{1-\text{н}}$, $\langle h'h\rangle_{1-\text{н}}$. То же верно и для модели (8). Все эти члены присутствуют в соответсвующих действиях, делая обе модели мультипликативно перенормируемыми. Для модели (6) перенормированное действие можно записать в форме

$$\mathcal{S}_R(\Phi) = \frac{1}{2}Z_1h'h' + h'\left\{-\partial_t + Z_{\perp}\nu_{\perp}\partial_{\perp}^2 + Z_{\|}\nu_{\|}\,\partial_{\|}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\|}(\partial_{\|}h)^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\perp}(\partial_{\perp}h)^2\right\}, \tag{11}$$

где $\nu_{\|}$, $\nu_{\perp}$, $\lambda_{\|}$ и $\lambda_{\perp}$ — перенормированные аналоги затравочных параметров. Перенормировочные константы Z зависят только от полностью безразмерных параметров $g_{\|}$ и $g_{\perp}$ и поглощают все полюсы по ε.

Перенормированное действие (11) получается из исходного (8) перенормировкой полей $h \to Z_h h$ и $h' \to Z_{h'}h'$ и параметров:

$$\lambda_{\|0} = g_{\|0}\nu_{\|0}^{5/4}\nu_{\perp 0}^{1/4},\ \lambda_{\|} = g_{\|}\nu_{\|}^{5/4}\nu_{\perp}^{1/4}\mu^{\varepsilon/2},\ \lambda_{\perp 0} = g_{\perp 0}\nu_{\|0}^{1/4}\nu_{\perp 0}^{5/4},\ \lambda_{\perp} = g_{\perp}\nu_{\|}^{1/4}\nu_{\perp}^{5/4}\mu^{\varepsilon/2}. \tag{12}$$

Перенормировочные константы в уравнениях (11) и (12) связаны следующим образом:

$$\begin{gathered} Z_1 = Z_{h'}^2,\ Z_hZ_{h'} = 1,\ Z_{\perp} = Z_{\nu_{\perp}},\ Z_{\|} = Z_{\nu_{\|}}, \\ Z_{g_{\perp}} = Z_h^{-1}Z_{\perp}^{-5/4}Z_{\|}^{-1/4}, Z_{g_{\|}} = Z_h^{-1}Z_{\perp}^{-1/4}Z_{\|}^{-5/4}. \end{gathered} \tag{13}$$

Перенормировочные константы Z_1, $Z_\|$ и $Z_\perp$ вычисляются непосредственно из диаграмм, затем константы в (12) находятся из (13). Перенормировочные константы можно найти из требования, чтобы функции Грина перенормированной модели (11) были УФ-конечны при выражении их через перенормированные переменные. В нашем случае для модели (6) это означает, что функции Грина УФ-конечны при $\varepsilon \to 0$.

Для удобства введём обозначения:

$$g_\perp := g_\perp \left(\frac{S_d}{64(2\pi)^d}\right)^{1/2}, \, g_\| := g_\| \left(\frac{S_d}{64(2\pi)^d}\right)^{1/2}, w := \frac{S_{d-1}}{2(2\pi)^{d-1}} w, \tag{14}$$

где $S_d = 2\pi^d/\Gamma(d/2)$ — площадь поверхности единичной сферы в пространстве размерности d. Тогда вычисление в первом порядке по $g_\|$ и $g_\perp$ (однопетлевое приближение) даст

$$Z_\| = 1 + \frac{16}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m}\right)^\varepsilon g_\|(g_\perp - g_\|) \frac{d-1}{d(d+2)}, \tag{15}$$

$$Z_\perp = 1 - \frac{16}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m}\right)^\varepsilon g_\perp(g_\perp - g_\|) \frac{1}{d(d+2)}, \tag{16}$$

$$Z_1 = 1 - \frac{8}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m}\right)^\varepsilon \left(2g_\perp g_\| \frac{d-1}{d(d+2)} + g_\|^2 \frac{3}{d(d+2)} + g_\perp^2 \frac{d^2-1}{d(d+2)}\right). \tag{17}$$

Если использовать схему минимальных вычитаний (MS), перенормировочные константы принимают вид «$Z = 1 +$ полюсы только по ε» («и ξ» для модели (8)). Тогда, строго говоря, в условиях нашего однопетлевого приближения мы должны сделать замену $d = 2 - \varepsilon \to 2$ в выражениях (15)–(17). Однако некоторое время мы продолжим использовать их в прежней форме: чтобы можно было получить некоторые точные результаты. Похожая перенормировочная схема, где размерность d удерживается в «геометрических множителях», возникающих из свёрток различных проекторов, использовалась ранее; её справедливость и эквивалентность схеме MS была продемонстрирована в [30].

Вернёмся к модели (8). Для неё ренормированное действие выглядит следующим образом:

$$\mathcal{S}_R(\Phi) = \frac{1}{2} Z_1 h' h' + h' \left\{ -\partial_t - v\partial_\| + Z_\perp \nu_\perp \partial_\perp^2 + Z_\| \nu_\| \partial_\|^2 + \frac{1}{2}\lambda_\| (\partial_\| h)^2 + \frac{1}{2}\lambda_\perp (\partial_\perp h)^2 \right\} + \\ + \mathcal{S}_v. \tag{18}$$

Вычисление диаграмм даёт другое значение для $Z_\|$:

$$Z_\| = 1 + \frac{16}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m}\right)^\varepsilon g_\|(g_\perp - g_\|) \frac{d-1}{d(d+2)} - w\frac{1}{\xi}.$$

Связь $Z_w Z_\| = 1$ будет нужна позднее для вычисления аномальных размерностей.

РГ-уравнения и РГ-функции. Кратко рассмотрим простой вывод РГ-уравнений; детальное обсуждение можно найти в монографиях [10, 11]. РГ-уравнения пишутся для перенормированных функций Грина $G_R = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_R$. Они отличаются от исходных (неперенормированных) функций Грина G общими численными множителями (из-за перемасштабирования полей) и другим выбором параметров (e, μ вместо e_0). Таким образом, перенормированные функции Грина также можно использовать для анализа критического поведения. Связь $S_R(Z_\Phi \Phi, e, \mu) = S(\Phi, e_0)$ между функционалами (6) и (11) (и аналогично для (8) и (18)) соответствует

$$G(e_0, \dots) = Z_h^{N_h} Z_{h'}^{N_{h'}} G_R(e, \mu \dots) \tag{19}$$

между функциями Грина. Здесь, как и выше, N_h и $N_{h'}$ — числа полей, входящих в G (мы учитываем, что в модели (8) $Z_v = 1$); $e_0 = \{g_{\|0}, g_{\perp 0}, \nu_{\|0}, \nu_{\perp 0}\}$ — полный набор затравочных параметров (для модели (8) он включает ещё и w_0); $e = \{g_\|, g_\perp, \nu_\|, \nu_\perp\}$ — их перенормированные эквиваленты; многоточие обозначает прочие аргументы (время, координаты, импульсы).

Мы используем символ $\widetilde{\mathcal{D}}_\mu$ для обозначения дифференциального оператора $\mu\partial_\mu|_{e_0}$ при фиксированных затравочных параметрах. Если выразить его через перенормированные переменные, он будет выглядеть следующим образом.

Для модели (6)

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_\mu + \beta_{g_\|}\partial_{g_\|} + \beta_{g_\perp}\partial_{g_\perp} - \gamma_\|\mathcal{D}_\| - \gamma_\perp\mathcal{D}_\perp; \tag{20}$$

для модели (8)

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_\mu + \beta_{g_\|}\partial_{g_\|} + \beta_{g_\perp}\partial_{g_\perp} + \beta_w\partial_w - \gamma_\|\mathcal{D}_\| - \gamma_\perp\mathcal{D}_\perp,$$

где $\mathcal{D}_x \equiv x\partial_x$ для любой переменной x. Аномальные размерности γ для любой величины F определяются:

$$\gamma_F \equiv \widetilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F; \tag{21}$$

в то время как β-функции для двух безразмерных констант взаимодействия $g_\|$ и $g_\perp$ модели (6) будут равны:

$$\begin{aligned} \beta_{g_\perp} &= g_\perp(-\gamma_{g_\perp} - \varepsilon/2), \\ \beta_{g_\|} &= g_\|(-\gamma_{g_\|} - \varepsilon/2). \end{aligned} \tag{22}$$

Чтобы вывести основные дифференциальные РГ-уравнения, мы применяем к обеим частям равенства (19) оператор $\widetilde{\mathcal{D}}_\mu$:

$$\{\mathcal{D}_{RG} + N_h\gamma_h + N_{h'}\gamma_{h'}\}\ G_R(e, \mu, \dots) = 0.$$

Наконец, из уравнений (13) определяются следующие соотношения между аномальными размерностями (21):

$$\begin{aligned} \gamma_{g_\perp} &= \gamma_1/2 - 5\gamma_\perp/4 - \gamma_\|/4, \\ \gamma_{g_\|} &= \gamma_1/2 - \gamma_\perp/4 - 5\gamma_\|/4. \end{aligned}$$

Аномальные размерности могут быть найдены из соотношений

$$\gamma_{g_\perp} = -\varepsilon(D_{g_\perp}\ln Z_{g_\perp} + D_{g_\|}\ln Z_{g_\perp})/2,\ \gamma_{g_\|} = -\varepsilon(D_{g_\perp}\ln Z_{g_\|} + D_{g_\|}\ln Z_{g_\|})/2, \tag{23}$$

получаемых из определения (21), выражения (20) для оператора $\widetilde{\mathcal{D}}_\mu$ в перенормированных переменных и из того факта, что перенормировочные константы зависят только от двух полностью безразмерных констант взаимодействия $g_\parallel$ и $g_\perp$. В соотношениях (23) мы оставили только члены старшего порядка в β-функциях (22), так как этого достаточно для однопетлевого приближения.

Используя MS-схему в однопетлевом приближении, получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_{g_\perp} &= g_\parallel^2 + 4g_\parallel g_\perp - g_\perp^2, \\ \gamma_{g_\parallel} &= g_\perp^2 + 4g_\parallel g_\perp - g_\parallel^2, \end{aligned} \tag{24}$$

с точностью до поправок порядка $g_\parallel^2$, $g_\perp^2$, $g_\parallel g_\perp$ и выше.

Модель (8) включает ещё одну β-функцию:

$$\beta_w = w(-\xi + \gamma_\parallel).$$

Аномальные размерности имеют следующий вид в однопетлевом приближении:

$$\begin{aligned} \gamma_{g_\perp} &= g_\parallel^2 + 4g_\parallel g_\perp - g_\perp^2, \\ \gamma_{g_\parallel} &= g_\perp^2 + 4g_\parallel g_\perp - g_\parallel^2 + w\frac{g_\perp}{g_\parallel}, \\ \gamma_\parallel &= g_\parallel(g_\perp - g_\parallel) + w. \end{aligned} \tag{25}$$

Неподвижные точки и скейлинговые режимы для модели без поля скорости. Хорошо известно, что асимптотическое поведение (большие времена и расстояния) перенормируемой теории поля определяется ИК-притягивающими неподвижными точками соответствующих уравнений РГ. В общем случае, координаты возможных неподвижных точек находятся из требования, чтобы все β-функции обратились в нуль. В модели (8) координаты $g_\parallel^*$, $g_\perp^*$ определяются двумя уравнениями

$$\beta_{g_\parallel}(g_\parallel^*, g_\perp^*) = 0,\ \beta_{g_\perp}(g_\parallel^*, g_\perp^*) = 0, \tag{26}$$

где β-функции берутся из (22). Тип фиксированной точки определяется матрицей

$$\Omega = \{\Omega_{ij} = \partial\beta_i/\partial g_j\},$$

где β_i — полный набор β-функций; $g_j = \{g_\parallel, g_\perp\}$ — полный набор констант взаимодействия. Для ИК-притягивающей неподвижной точки матрица Ω должна быть положительно определённой, т. е. вещественные части всех её собственных чисел должны быть положительными. Обозначим их Ω_1 и Ω_2.

Из соотношений (24) находим:

$$\begin{aligned} \beta_{g_\perp} &= -\varepsilon/2 g_\perp - 4g_\parallel g_\perp^2 - g_\perp g_\parallel^2 + g_\perp^3, \\ \beta_{g_\parallel} &= -\varepsilon/2 g_\parallel - 4g_\parallel^2 g_\perp - g_\perp^2 g_\parallel + g_\parallel^3, \end{aligned} \tag{27}$$

где возможны поправки порядка $g_\parallel^2$ и т. п.

Из уравнений (26) и (27) следует, что в модели (6) девять неподвижных точек.

1. Гауссова (свободная) неподвижная точка:

$$g_\perp^* = 0,\ g_\parallel^* = 0,\ \Omega_1 = -\varepsilon/2,\ \Omega_2 = -\varepsilon/2$$

(все эти выражения точные).

2. Точки 2 и 3:

$$g_\perp^* = 0,\ g_\parallel^* = \pm\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2},\ \Omega_1 = -\varepsilon,\ \Omega_2 = \varepsilon.$$

3. Точки 4 и 5:

$$g_\perp^* = \pm\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2},\ g_\parallel^* = 0,\ \Omega_1 = \varepsilon,\ \Omega_2 = -\varepsilon.$$

4. Точки 6 и 7 соответсвуют чистой КПЗ-модели:

$$g_\perp^* = g_\parallel^* = \pm i\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{1/2},\ \Omega_1 = \varepsilon,\ \Omega_2 = -\varepsilon/2.$$

5. Точки 8 и 9:

$$g_\perp^* = -g_\parallel^* = \pm\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{1/2},\ \Omega_1 = \varepsilon,\ \Omega_2 = \varepsilon/2.$$

Все эти девять точек стягиваются в точку $(0,0)$ при $d=2$. Чтобы нагляднее показать характер этих точек, наложим ограничение $g_\perp \neq 0$ и сделаем замену переменных для зарядов: $g_1 = g_\perp^2$, $g_2 = g_\parallel/g_\perp$. Тогда вместо девяти у нас будет три неподвижных точки.

1. Точка 1:

$$g_1^* = \varepsilon/2,\ g_2^* = 0,\ \Omega_1 = \varepsilon,\ \Omega_2 = -\varepsilon.$$

2. Точка 2 — точка КПЗ-модели:

$$g_1^* = -\varepsilon/8,\ g_2^* = 1,\ \Omega_1 = \varepsilon,\ \Omega_2 = -\varepsilon/2.$$

3. Точка 3 — ИК-устойчивая точка:

$$g_1^* = \varepsilon/8,\ g_2^* = -1,\ \Omega_1 = \varepsilon,\ \Omega_2 = \varepsilon/2.$$

Д. Вольф [15] рассматривал только случай $d=2$, и для этого случая приведённые точки находятся в согласии с его результатами.

Неподвижные точки и скейлинговые режимы для модели с полем скорости. Рассмотрим неподвижные точки модели (8). Из соотношений (25) находим:

$$\begin{aligned}
\beta_{g_\perp} &= -\varepsilon/2 g_\perp - 4g_\parallel g_\perp^2 - g_\perp g_\parallel^2 + g_\perp^3,\\
\beta_{g_\parallel} &= -\varepsilon/2 g_\parallel - 4g_\parallel^2 g_\perp - g_\perp^2 g_\parallel + g_\parallel^3 - w g_\perp,\\
\beta_w &= -\xi w - w g_\parallel (g_\perp - g_\parallel) + w^2,
\end{aligned}$$

с точностью до поправок порядка $g_\parallel^4$ и т. п. Мы также продолжаем использовать обозначения согласно (14). Под Ω_3 будем понимать третье собственное число матрицы Ω.

Перечислим неподвижные точки с $w^* = 0$.

1. Гауссова (свободная) неподвижная точка:

$$g_\perp^* = 0,\ g_\parallel^* = 0,\ \Omega_1 = -\varepsilon/2,\ \Omega_2 = -\varepsilon/2,\ \Omega_3 = -\xi$$

(все эти выражения точные).

2. Точка 2 — КПЗ-точка:

$$g_\perp^* = g_\parallel^* = \pm i\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{1/2}, \ \Omega_1 = \varepsilon, \ \Omega_2 = -\varepsilon/2, \ \Omega_3 = -\xi.$$

3. Точки 3 и 4:

$$g_\perp^* = \pm\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2}, \ g_\parallel^* = 0, \ \Omega_1 = \varepsilon, \ \Omega_2 = -\varepsilon \ \Omega_3 = -\xi.$$

4. Точки 5 и 6:

$$g_\parallel^* = \pm\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/2}, \ g_\perp^* = 0, \ \Omega_1 = -\varepsilon, \ \Omega_2 = \varepsilon, \ \Omega_3 = -\xi + \varepsilon/2.$$

5. Точки 7 и 8:

$$g_\perp^* = -g_\parallel^* = \pm\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{1/2}, \ \Omega_1 = \varepsilon, \ \Omega_2 = \varepsilon/2, \ \Omega_3 = -\xi + 16\varepsilon.$$

Эти точки устойчивы при $-\xi + 16\varepsilon > 0$.

При $d = 2$ и $\xi > 0$ все точки стягиваются в $(0, 0, 0)$ и теряют устойчивость. Таким образом, включение скорости разрушает устойчивость неподвижных точек модели Вольфа.

Дальнейший анализ неподвижных точек требует дополнительного рассмотрения, однако, легко убедиться, что при $w^* \neq 0$, неподвижные точки модели без скорости — КПЗ-точка $g_\perp^* = g_\parallel^*$ и устойчивая точка $g_\perp^* = -g_\parallel^*$ — перестают быть решениями уравнений $\beta_i(g_\parallel^*, g_\perp^*, w*) = 0$.

Заключение. Мы изучили две модели случайного анизотропического роста границы раздела фаз — модель Вольфа [15] и модель Вольфа под влиянием турбулентного перемешивания, описываемого ансамблем Авельянеды—Майда [29].

Оказалось, что обе модели могут быть переформулированы как мультипликативно перенормируемые модели с функционалами действия (6) и (8). Используя теоретико-полевую РГ, мы установили существование ряда неподвижных точек в обеих моделях.

В модели (6) дополнительно к неподвижной устойчивой точке изотропной модели КПЗ появилась новая ИК-устойчивая точка. При $d = 2$ все неподвижные точки стремятся к нулю. Однако картина потоков инвариантных зарядов показывает, что сильно взаимодействующая неподвижная точка инвариантной КПЗ-модели [22], если она действительно существует, сохраняется и в нашей задаче, но может стать нестабильной.

В обобщённой модели (8) включение скорости приводит к разрушению стабильности неподвижных точек исходной модели без скорости.

Дальнейший анализ неподвижных точек — предмет текущего исследования.

В нашем анализе мы использовали простейший ансамбль Авельянеды—Майда для адвективного поля скорости. Было бы интересно рассмотреть более реалистичные модели: негауссовы, с конечным временем корреляции и др.

Литература

1. *Krug J., Spohn H.* Kinetic roughening of growing surfaces // Solids far from equilibrium / ed. by C. Godreche. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. P. 479–582.

2. *Halpin-Healy T., Zhang Y.-C.* Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics // Phys. Rev. 1995. Vol. 254. P. 215–414.

3. *Barabási A.-L., Stanley H. E.* Fractal concepts in surface growth. Cambridge University Press, 1995.

4. *Krug J.* Origins of scale invariance in growth processes // Adv. Phys. 1997. Vol. 46. P. 139–282.
5. *Lässig M.* On growth, disorder, and field theory // J. Phys.: Cond. Matt. 1998. Vol. 10. P. 9905.
6. *Eden M.* A two-dimensional growth process // Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Cambridge University Press, 1961. Vol. 4. P. 223.
7. *Edwards S. F., Wilkinson D. R.* The surface statistics of g Granular aggregate // Proc. R. Soc. London (A). 1982. Vol. 381. P. 17.
8. *Kim J. M., Kosterlitz J. M., Ala-Nissila T.* Surface growth and crossover behaviour in a restricted solid-on-solid model // J. Phys. (A). 1991. Vol. 24. P. 5569.
9. *Penrose M. D.* Growth and roughness of the interface for ballistic deposition // J. Stat. Phys. 2008. Vol. 131. P. 247–268.
10. *Zinn-Justin J.* Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.
11. *Vasiliev A. N.* The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.
12. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.* Dynamic scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 889.
13. *Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J.* Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid // Phys. Rev. 1977. Vol. 16. P. 732.
14. *Kardar M., Zhang Y.-C.* Scaling of directed polymers in random media // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 2087.
15. *Wolf D. E.* Kinetic roughening of vicinal surfaces // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 67. P. 1783.
16. *Chen L., Toner J.* Universality for moving stripes: a hydrodynamic theory of polar active smectics // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111. 088701.
17. *Jeong H., Kahng B., Kim D.* Dynamics of a Toom interface in three dimensions // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 747–749.
18. *Jeong H., Kahng B., Kim D.* Anisotropic surface growth model in disordered media // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 25. P. 5094.
19. *Frey E., Täuber U. C.* 2-loop renormalization-group analysis of the Burgers—Kardar—Parisi—Zhang equation // Phys. Rev. (E). 1994. Vol. 50. P. 1024–1045.
20. *Lässig M.* On the renormalization of the Kardar—Parisi—Zhang equation // Nucl. Phys. (B). 1995. Vol. 448. P. 559.
21. *Lässig M.* Quantized scaling of growing surfaces // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 2366.
22. *Canet L., Chaté H., Delamotte B., Wschebor N.* Nonperturbative renormalization group for the Kardar—Parisi—Zhang equation // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 104. 150601.
23. *Kloss T., Canet L., Wschebor N.* Nonperturbative renormalization group for the stationary Kardar—Parisi—Zhang equation: Scaling functions and amplitude ratios in $1+1$, $2+1$, and $3+1$ dimensions // Phys. Rev. (E). 2012. Vol. 86. 051124.
24. *Satten G., Ronis D.* Critical phenomena in randomly stirred fluids // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 91.
25. *Onuki A., Kawasaki K.* Critical phenomena of classical fluids under flow. I: Mean field approximation // Progr. Theor. Phys. 1980. Vol. 63. P. 122–139.
26. *Beysens D., Gbadamassi M., Boyer L.* Light-scattering study of a critical mixture with shear flow // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol. 43. P. 1253.
27. *Falkovich G., Gawędzki K., Vergassola M.* Particles and fields in fluid turbulence // Rev. Mod. Phys. 2001. Vol. 73. P. 913.
28. *Antonov N. V., Kakin P. I.* Effects of random environment on a self-organized critical system: Renormalization group analysis of a continuous model // Theor. Math. Phys. 2015. Vol. 185, N 1. P. 1391–1407.
29. *Avellaneda M., Majda A.* Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport // Commun. Math. Phys. 1990. Vol. 131. P. 381–429.
30. *Wiese K. J.* Critical discussion of the 2-loop calculations for the KPZ-equation // Phys. Rev. (E). 1997. Vol. 56. P. 5013.

References

1. Krug J., Spohn H. Kinetic roughening of growing surfaces. *Solids far from equilibrium.* Ed. by C. Godreche. Cambridge, Cambridge University Press, 1990, pp. 479–582.
2. Halpin-Healy T., Zhang Y.-C. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 1995, vol. 254, pp. 215–414.
3. Barabási A.-L., Stanley H. E. *Fractal concepts in surface growth.* Cambridge University Press, 1995.
4. Krug J. Origins of scale invariance in growth processes. *Adv. Phys.*, 1997, vol. 46, pp. 139–282.
5. Lässig M. On growth, disorder, and field theory. *J. Phys.: Cond. Matt.*, 1998, vol. 10, pp. 9905.

6. Eden M. A two-dimensional growth process. *Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.* Cambridge University Press, 1961, vol. 4, pp. 223.

7. Edwards S. F., Wilkinson D. R. The surface statistics of g Granular aggregate. *Proc. R. Soc. London (A)*, 1982, vol. 381, pp. 17.

8. Kim J. M., Kosterlitz J. M., Ala-Nissila T. Surface growth and crossover behaviour in a restricted solid-on-solid model. *J. Phys. (A)*, 1991, vol. 24, pp. 5569.

9. Penrose M. D. Growth and roughness of the interface for ballistic deposition. *J. Stat. Phys.*, 2008, vol. 131, pp. 247–268.

10. Zinn-Justin J. *Quantum field theory and critical phenomena.* Oxford, Clarendon, 1989.

11. Vasiliev A. N. *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics.* Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2004.

12. Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, pp. 889.

13. Forster D., Nelson D. R., Stephen M. J. Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid. *Phys. Rev.*, 1977, vol. 16, pp. 732.

14. Kardar M., Zhang Y.-C. Scaling of directed polymers in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, vol. 58, pp. 2087.

15. Wolf D. E. Kinetic roughening of vicinal surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, vol. 67, pp. 1783.

16. Leiming Chen, Toner J. Universality for moving stripes: a hydrodynamic theory of polar active smectics. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 111, 088701.

17. Jeong H., Kahng B., Kim D. Dynamics of a Toom interface in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, pp. 747–749.

18. Jeong H., Kahng B., Kim D. Anisotropic surface growth model in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 25, pp. 5094.

19. Frey E., Täuber U. C. 2-loop renormalization-group analysis of the Burgers—Kardar—Parisi—Zhang equation. *Phys. Rev. (E)*, 1994, vol. 50, pp. 1024–1045.

20. Lässig M. On the renormalization of the Kardar—Parisi—Zhang equation. *Nucl. Phys. (B)*, 1995, vol. 448, pp. 559.

21. Lässig M. Quantized scaling of growing surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 80, pp. 2366.

22. Canet L., Chaté H., Delamotte B., Wschebor N. Nonperturbative renormalization group for the Kardar—Parisi—Zhang equation. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 104, 150601.

23. Kloss T., Canet L., Wschebor N. Nonperturbative renormalization group for the stationary Kardar—Parisi—Zhang equation: Scaling functions and amplitude ratios in $1+1$, $2+1$, and $3+1$ dimensions. *Phys. Rev. (E)*, 2012, vol. 86, 051124.

24. Satten G., Ronis D. Critical phenomena in randomly stirred fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, vol. 55, pp. 91.

25. Onuki A., Kawasaki K. Critical phenomena of classical fluids under flow. I: Mean field approximation. *Progr. Theor. Phys.*, 1980, vol. 63, pp. 122–139.

26. Beysens D., Gbadamassi M., Boyer L. Light-scattering study of a critical mixture with shear flow. *Phys. Rev. Lett.*, 1979, vol. 43, pp. 1253.

27. Falkovich G., Gawędzki K., Vergassola M. Particles and fields in fluid turbulence. *Rev. Mod. Phys.*, 2001, vol. 73, pp. 913.

28. Antonov N. V., Kakin P. I. Effects of random environment on a self-organized critical system: Renormalization group analysis of a continuous model. *Theor. Math. Phys.*, 2015, vol. 185, no 1, pp. 1391–1407.

29. Avellaneda M., Majda A. Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport. *Commun. Math. Phys.*, 1990, vol. 131, pp. 381–429.

30. Wiese K. J. Critical discussion of the 2-loop calculations for the KPZ-equation. *Phys. Rev. (E)*, 1997, vol. 56, pp. 5013.

Статья поступила в редакцию 23 октября 2016 г.

Контактная информация

Антонов Николай Викторович — доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: n.antonov@spbu.ru

Какинъ Полина Игоревна — аспирантка; e-mail: p.kakin@spbu.ru

Antonov Nikolay Viktorovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor; e-mail: n.antonov@spbu.ru

Kakin Polina Igorevna — post graduate student; e-mail: p.kakin@spbu.ru